Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Second semestre 2008/2009
SMA2/SMI2
Mathématiques 2 - Algèbre 2

Contrôle de Rattrapage

(6 Juillet 2009 - Durée : 2 heures)

Problème. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $f_m : E \to E$ l'application définie par

$$f_m(x, y, z) = (mx + y + z,\ x + my + z,\ x + y + mz).$$

1. Montrer que f_m est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice $A_m = M(f_m, \mathcal{B})$ de f_m dans la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer le déterminant $\det(A_m)$ de la matrice A_m.
4. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

<u>On prendra dans toute la suite $m = 2$, et on écrira $f = f_2$ et $A = A_2$.</u>

5. Déduire de la question 4 que l'endomorphisme f est bijectif, et déterminer la matrice $M(f^{-1}, \mathcal{B})$ de l'endomorphisme f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
6. Trouver une base (v_1, v_2) du sous-espace vectoriel $\ker(f - \mathrm{id}_E)$, où id_E est l'endomorphisme identité de E.
7. Soit le vecteur $v_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
8. Déterminer la matrice $D = M(f, \mathcal{B}')$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.
9. Calculer D^n pour $n \geq 1$.
10. Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
11. Montrer que $\det(A^n) = \det(D^n)$ pour tout $n \geq 1$. En déduire la valeur de $\det(A^n)$.
12. Décomposer la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sous la forme $T = 2I_3 + N$, où I_3 est la matrice unité d'ordre 3 et N est une matrice à préciser.
13. Calculer les puissances $N^2, N^3, N^4, \ldots$.
14. En déduire T^n pour $n \geq 3$.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..